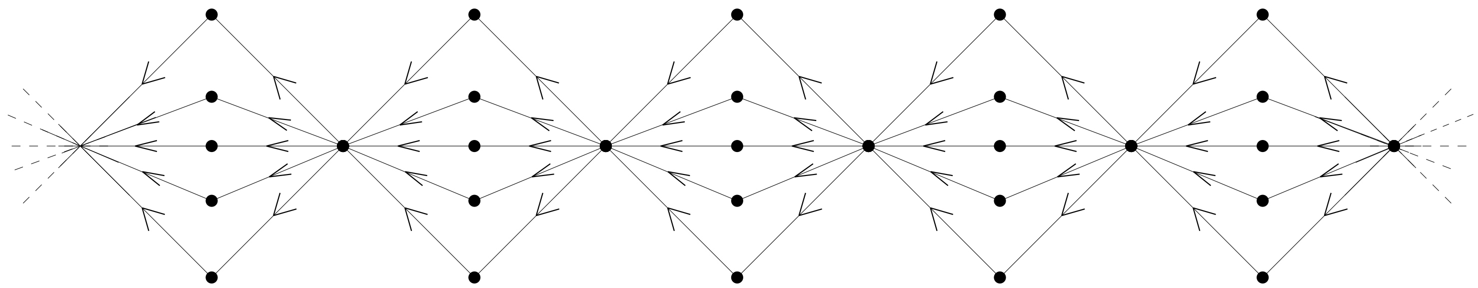
Analyse spectrale de la matrice d'adjacence sur des graphes

Rafael Tiedra
(Pontificia Universidad Católica de Chile)

Neuchâtel, Février 2011

Collaboration avec Marius Măntoiu (Universidad de Chile)
et Serge Richard (Lyon 1)

1 Graphes admissibles



Graphes

Un graphe est un couple $(X, \sim)$ formé d'un ensemble dénombrable infini X et d'une relation symétrique $\sim$ sur X telle que $x \sim y$ implique $x \neq y$.

Graphes

Un graphe est un couple $(X, \sim)$ formé d'un ensemble dénombrable infini X et d'une relation symétrique $\sim$ sur X telle que $x \sim y$ implique $x \neq y$.

Les points $x \in X$ sont les sommets de X et les couples $(x, y) \in X \times X$ tels que $x \sim y$ sont les arêtes de X.

Graphes

Un graphe est un couple $(\mathsf{X}, \sim)$ formé d'un ensemble dénombrable infini X et d'une relation symétrique $\sim$ sur X telle que $x \sim y$ implique $x \neq y$.

Les points $x \in \mathsf{X}$ sont les sommets de X et les couples $(x, y) \in \mathsf{X} \times \mathsf{X}$ tels que $x \sim y$ sont les arêtes de X.

(les arêtes multiples et les boucles sont proscrites par la définition)

Graphes

Un graphe est un couple $(\mathsf{X}, \sim)$ formé d'un ensemble dénombrable infini X et d'une relation symétrique $\sim$ sur X telle que $x \sim y$ implique $x \neq y$.

Les points $x \in \mathsf{X}$ sont les sommets de X et les couples $(x, y) \in \mathsf{X} \times \mathsf{X}$ tels que $x \sim y$ sont les arêtes de X.

(les arêtes multiples et les boucles sont proscrites par la définition)

Pour $x \in \mathsf{X}$, on pose

- $\mathsf{N}(x) := \{y \in \mathsf{X} \mid y \sim x\}$, ensemble des voisins de x,
- $\deg(x) := \#\mathsf{N}(x)$, degré de x,
- $\deg(\mathsf{X}) := \sup_{x \in \mathsf{X}} \deg(x)$, degré de X.

Graphes

Un graphe est un couple $(X, \sim)$ formé d'un ensemble dénombrable infini X et d'une relation symétrique $\sim$ sur X telle que $x \sim y$ implique $x \neq y$.

Les points $x \in X$ sont les sommets de X et les couples $(x, y) \in X \times X$ tels que $x \sim y$ sont les arêtes de X.

(les arêtes multiples et les boucles sont proscrites par la définition)

Pour $x \in X$, on pose

- $N(x) := \{y \in X \mid y \sim x\}$, ensemble des voisins de x,
- $\deg(x) := \# N(x)$, degré de x,
- $\deg(X) := \sup_{x \in X} \deg(x)$, degré de X.

On suppose $(X, \sim)$ uniformément localement fini, *i.e.* $\deg(X) < \infty$.

Graphes orientés

On obtient $(\mathsf{X}, <)$ en décomposant l'ensemble des voisins de $x \in \mathsf{X}$ comme $\mathsf{N}(x) = \mathsf{N}^-(x) \sqcup \mathsf{N}^+(x)$, avec $y \in \mathsf{N}^-(x) \iff x \in \mathsf{N}^+(y)$.

Graphes orientés

On obtient $(X, <)$ en décomposant l'ensemble des voisins de $x \in X$ comme $N(x) = N^-(x) \sqcup N^+(x)$, avec $y \in N^-(x) \iff x \in N^+(y)$.

$x < y \iff x \in N^-(y)$ et l'arête (x, y) est positivement orientée.
Dans les schémas on dessine une flèche $x \leftarrow y$ si $x < y$.

Graphes orientés

On obtient $(X, <)$ en décomposant l'ensemble des voisins de $x \in X$ comme $N(x) = N^-(x) \sqcup N^+(x)$, avec $y \in N^-(x) \iff x \in N^+(y)$.

$x < y \iff x \in N^-(y)$ et l'arête (x, y) est positivement orientée. Dans les schémas on dessine une flèche $x \leftarrow y$ si $x < y$.

Quand les directions ont été fixées, on note $(X, <)$ pour le graphe orienté sous-jacent à $(X, \sim)$.

Chemins

Un chemin de x vers y est une suite de sommets $p = x_0 x_1 \dots x_n$ de X telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $x_{j-1} \sim x_j$ pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$.
Si $x_0 = x_n$ le chemin est fermé.

Chemins

Un chemin de x vers y est une suite de sommets $p = x_0 x_1 \ldots x_n$ de X telle que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $x_{j-1} \sim x_j$ pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si $x_0 = x_n$ le chemin est fermé.

L'indice de p est la différence entre le nombre d'arêtes positivement orientées et négativement orientées, *i.e.*

$$\mathrm{ind}(p) := \#\left\{j : x_{j-1} < x_j\right\} - \#\left\{j : x_{j-1} > x_j\right\}.$$

Graphes admissibles

Définition 1.1. *Un graphe orienté* $(\mathsf{X}, <)$ *est admissible si*

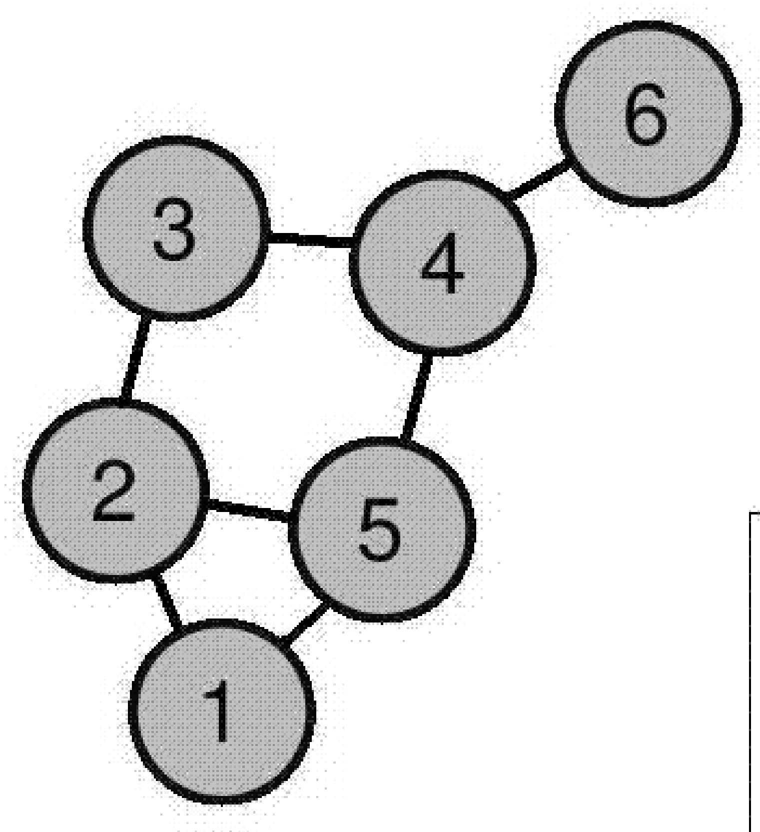
(i) il est univoque, i.e. *chaque chemin fermé dans* X *est d'indice zero,*

(ii) il est uniforme, i.e. *pour chaque* $x, y \in \mathsf{X}$

$$\#\{\mathsf{N}^-(x) \cap \mathsf{N}^-(y)\} = \#\{\mathsf{N}^+(x) \cap \mathsf{N}^+(y)\}.$$

Un graphe $(\mathsf{X}, \sim)$ *est admissible s'il existe un graphe orienté admissible* $(\mathsf{X}, <)$ *sous-jacent à* $(\mathsf{X}, \sim)$*.*

2 Matrice d'adjacence



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opérateur d'adjacence

L'opérateur d'adjacence H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := \ell^2(\mathsf{X})$ est

$$(\mathsf{H}f)(x) := \sum_{y \sim x} f(y), \quad f \in \mathcal{H},\ x \in \mathsf{X}.$$

H est un opérateur autoadjoint borné avec $\|\mathsf{H}\| \le \deg(\mathsf{X})$ et $\sigma(\mathsf{H}) \subset [-\deg(\mathsf{X}), \deg(\mathsf{X})]$.

Opérateur d'adjacence

L'opérateur d'adjacence H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := \ell^2(\mathsf{X})$ est

$$(\mathsf{H}f)(x) := \sum_{y \sim x} f(y), \quad f \in \mathcal{H},\ x \in \mathsf{X}.$$

H est un opérateur autoadjoint borné avec $\|\mathsf{H}\| \leq \deg(\mathsf{X})$ et $\sigma(\mathsf{H}) \subset [-\deg(\mathsf{X}), \deg(\mathsf{X})]$.

Si $\mathsf{Ker}(\mathsf{H}) = \{0\}$, le graphe est injectif.

Opérateur d'adjacence

L'opérateur d'adjacence H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := \ell^2(X)$ est

$$(Hf)(x) := \sum_{y \sim x} f(y), \quad f \in \mathcal{H},\ x \in X.$$

H est un opérateur autoadjoint borné avec $\|H\| \leq \deg(X)$ et $\sigma(H) \subset [-\deg(X), \deg(X)]$.

Si $\mathsf{Ker}(H) = \{0\}$, le graphe est injectif.

(si $(X, \sim)$ n'est pas connexe, H est une somme directe et chaque composante peut être traitée séparément)

3 Le théorème

Théorème 3.1. *L'opérateur* H *sur un graphe admissible* $(\mathsf{X}, \sim)$ *est purement absolument continu sauf peut-être en* 0, *où il peut avoir une valeur propre avec espace propre*

$$\mathsf{Ker}(\mathsf{H}) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \sum_{y<x} f(y) = 0 = \sum_{y>x} f(y) \quad \forall x \in \mathsf{X} \right\}.$$

4 Exemples

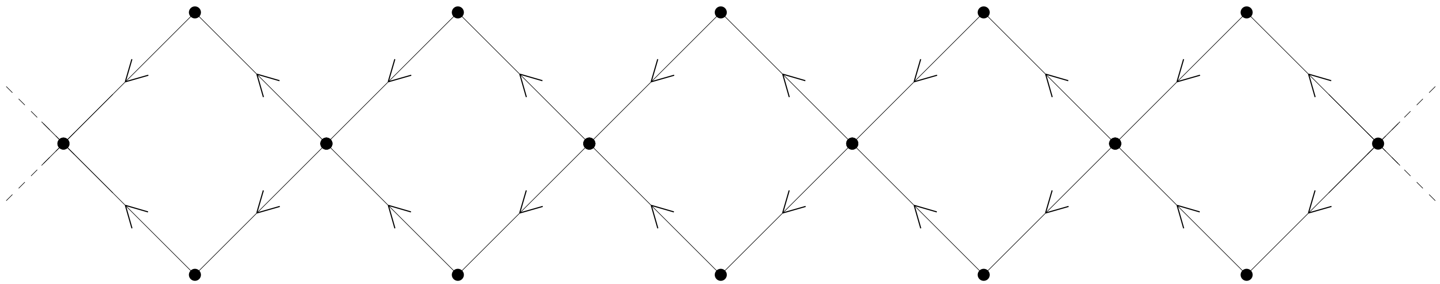


Figure 1: Exemple de graphe orienté admissible non injectif

$\mathsf{Ker}(\mathsf{H})$ est composé de tous les $\mathsf{f} \in \ell^2(\mathsf{X})$ valant $\mathsf{0}$ sur la rangée du milieu et ayant des valeurs opposées sur les deux autres rangées.

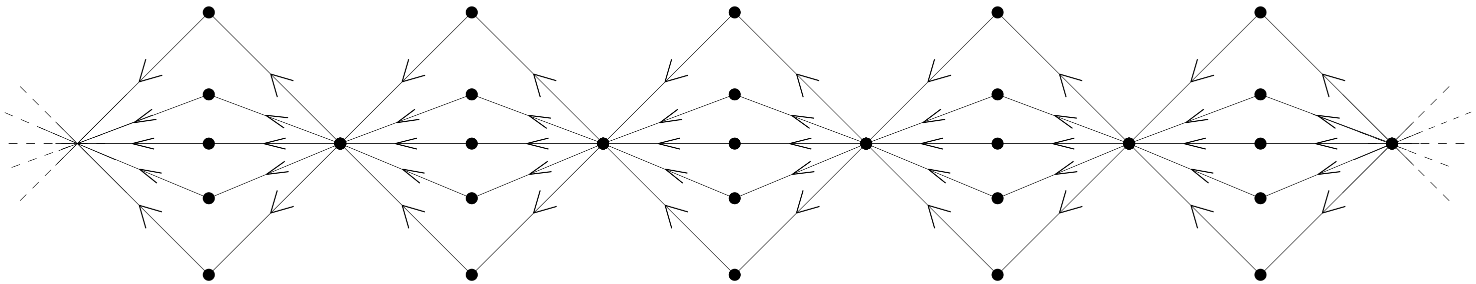


Figure 2: Exemple de graphe orienté admissible non injectif

Ce graphe orienté est admissible et injectif, donc H est purement absolument continu.

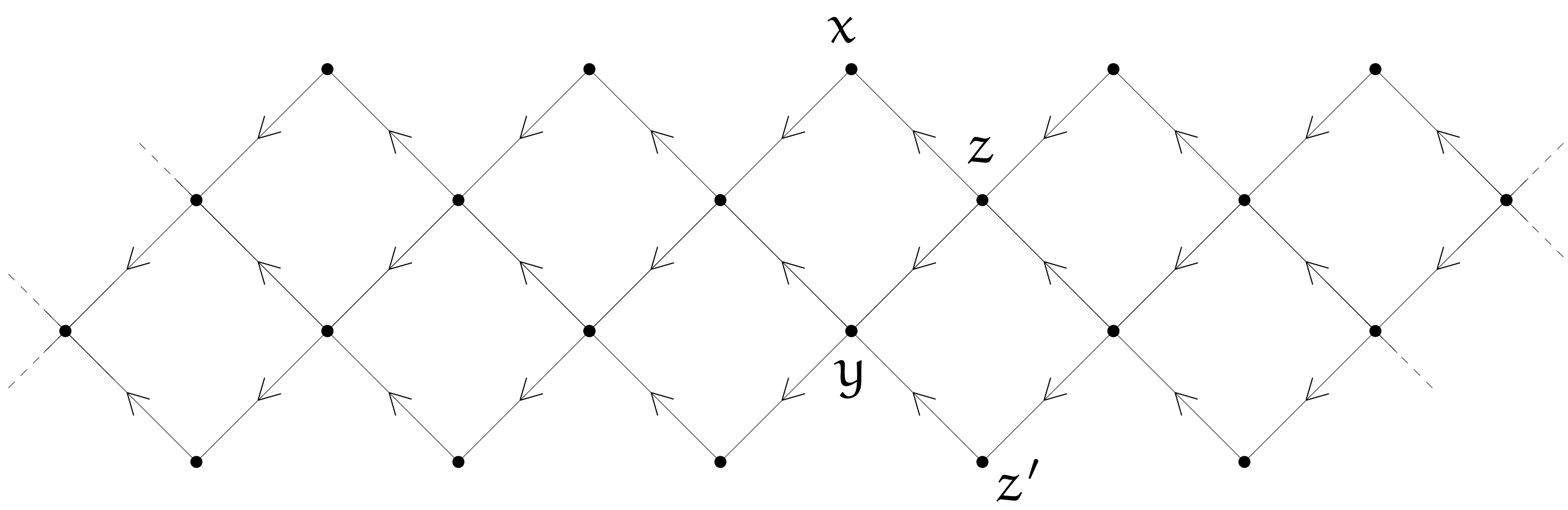


Figure 3: Exemple de graphe orienté admissible injectif

Ce graphe orienté est admissible et injectif, donc H est purement absolument continu.

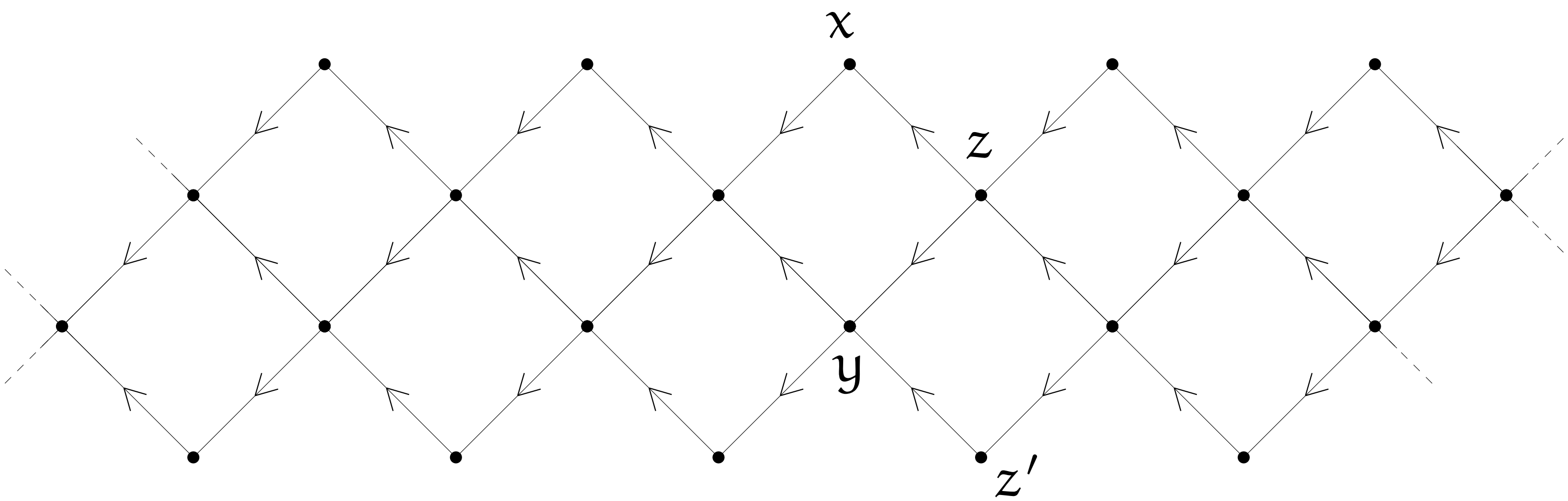


Figure 3: Exemple de graphe orienté admissible injectif

La condition $\sum_{w<x} f(w) = 0$ avec $f \in \ell^2(X)$ et x ci-dessus, implique $f(z) = 0$. On a aussi $f(z) + f(z') = 0$ à cause de la même condition pour y. Donc $f(z') = 0$ et le graphe est injectif puisque le raisonnement s'applique à chaque sommet de X.

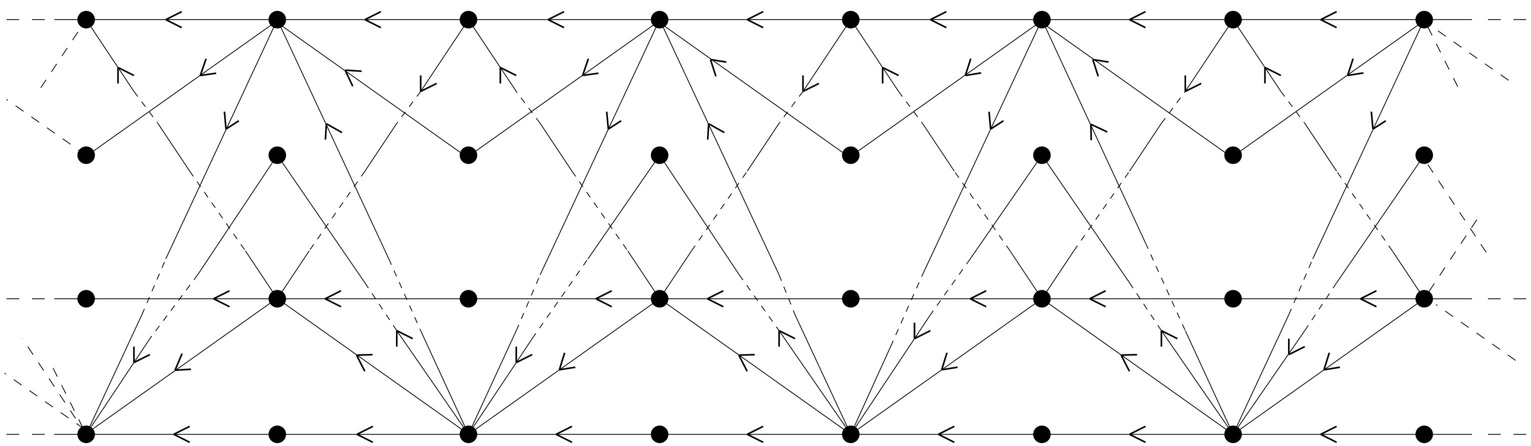


Figure 4: Exemple de graphe orienté admissible

Le graphe associé à l'hamiltonien XY de spins sur $\mathbb{Z}$

$$H_{XY} := -\frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \left(\sigma_1^{(x)} \sigma_1^{(y)} + \sigma_2^{(x)} \sigma_2^{(y)} \right)$$

est admissible.

Le graphe associé à l'hamiltonien XY de spins sur $\mathbb{Z}$

$$H_{XY} := -\frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \left(\sigma_1^{(x)} \sigma_1^{(y)} + \sigma_2^{(x)} \sigma_2^{(y)} \right)$$

est admissible.

$\Longrightarrow$ Le spectre de H_{XY} est purement absolument continu sauf peut-être en 0.

Le graphe associé à l'hamiltonien XY de spins sur $\mathbb{Z}$

$$H_{XY} := -\frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \left(\sigma_1^{(x)} \sigma_1^{(y)} + \sigma_2^{(x)} \sigma_2^{(y)} \right)$$

est admissible.

$\Longrightarrow$ Le spectre de H_{XY} est purement absolument continu sauf peut-être en 0.

(d'autres méthodes montrent que H_{XY} est purement absolument continu)

5 Idée de la démonstration

1. Il existe $\Phi : \mathsf{X} \to \mathbb{Z}$ tel que $\Phi(x) + 1 = \Phi(y)$ si $x < y$.
   (opérateur analogue à la position Q en mécanique quantique)

5 Idée de la démonstration

1. Il existe $\Phi : \mathsf{X} \to \mathbb{Z}$ tel que $\Phi(x) + 1 = \Phi(y)$ si $x < y$.
   (opérateur analogue à la position Q en mécanique quantique)
2. On a les identités de commutation suivantes
$$\mathsf{K} := [i\mathsf{H}, \Phi] \in \mathscr{B}(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad [\mathsf{H}, \mathsf{K}] = 0.$$

5 Idée de la démonstration

1. Il existe $\Phi : X \to \mathbb{Z}$ tel que $\Phi(x) + 1 = \Phi(y)$ si $x < y$.
   (opérateur analogue à la position Q en mécanique quantique)
2. On a les identités de commutation suivantes
$$K := [iH, \Phi] \in \mathscr{B}(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad [H, K] = 0.$$
3. Soit $A := \frac{1}{2}\big(\Phi K + K\Phi\big)$ sur $\mathcal{D}(A) := \big\{f \in \mathcal{H} \mid \Phi K f \in \mathcal{H}\big\}$.
   (opérateur analogue à
   $D = \frac{1}{2}(Q \cdot P + P \cdot Q) \equiv \frac{1}{2}\big(Q \cdot \big[i\frac{P^2}{2}, Q\big] + \big[i\frac{P^2}{2}, Q\big] \cdot Q\big)$
   en mécanique quantique)

5 Idée de la démonstration

1. Il existe $\Phi : \mathsf{X} \to \mathbb{Z}$ tel que $\Phi(x) + 1 = \Phi(y)$ si $x < y$.
   (opérateur analogue à la position Q en mécanique quantique)

2. On a les identités de commutation suivantes

$$\mathsf{K} := [i\mathsf{H}, \Phi] \in \mathscr{B}(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad [\mathsf{H}, \mathsf{K}] = 0.$$

3. Soit $A := \frac{1}{2}\big(\Phi\mathsf{K} + \mathsf{K}\Phi\big)$ sur $\mathcal{D}(A) := \big\{\mathsf{f} \in \mathcal{H} \mid \Phi\mathsf{K}\mathsf{f} \in \mathcal{H}\big\}$.
   (opérateur analogue à
   $\mathsf{D} = \frac{1}{2}(\mathsf{Q} \cdot \mathsf{P} + \mathsf{P} \cdot \mathsf{Q}) \equiv \frac{1}{2}\big(\mathsf{Q} \cdot \big[i\frac{P^2}{2}, \mathsf{Q}\big] + \big[i\frac{P^2}{2}, \mathsf{Q}\big] \cdot \mathsf{Q}\big)$
   en mécanique quantique)

4. On a $[i\mathsf{H}, A] = \mathsf{K}^2 \geq 0$, et donc

$$\big[i\mathsf{H}, A\big] = \mathsf{K}^2 > 0 \text{ sur } \mathsf{Ker}(\mathsf{K})^{\perp}.$$

5. On applique le théorème type Kato-Putnam ci-dessous avec

$$\mathcal{H}_0 := \mathsf{Ker}(\mathsf{K})^{\perp}, \quad \mathsf{A}_0 := \mathsf{A} \restriction \mathcal{H}_0, \quad \mathsf{H}_0 := \mathsf{H} \restriction \mathcal{H}_0.$$

5. On applique le théorème type Kato-Putnam ci-dessous avec

$$\mathcal{H}_0 := \mathsf{Ker}(\mathsf{K})^{\perp}, \quad A_0 := \mathsf{A} \restriction \mathcal{H}_0, \quad \mathsf{H}_0 := \mathsf{H} \restriction \mathcal{H}_0.$$

Si H_0 est un opérateur autoadjoint borné dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$, on a:

Définition 5.1. Un opérateur autoadjoint A_0 dans $\mathcal{H}_0$ est faiblement conjugué à H_0 si $[\mathrm{i}\mathsf{H}_0, A_0]$ est borné et $[\mathrm{i}\mathsf{H}_0, A_0] > 0$.

Théorème 5.2. Soit A_0 faiblement conjugué à H_0 avec $[\mathrm{i}\mathsf{H}_0, A_0]$ régulier vis-à-vis de A_0. Alors le spectre de H_0 est purement absolument continu.

5. On applique le théorème type Kato-Putnam ci-dessous avec

$$\mathcal{H}_0 := \mathsf{Ker}(\mathsf{K})^\perp, \quad A_0 := A \restriction \mathcal{H}_0, \quad \mathsf{H}_0 := \mathsf{H} \restriction \mathcal{H}_0.$$

Si H_0 est un opérateur autoadjoint borné dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$, on a:

Définition 5.1. Un opérateur autoadjoint A_0 dans $\mathcal{H}_0$ est faiblement conjugué à H_0 si $[\mathrm{i}\mathsf{H}_0, A_0]$ est borné et $[\mathrm{i}\mathsf{H}_0, A_0] > 0$.

Théorème 5.2. Soit A_0 faiblement conjugué à H_0 avec $[\mathrm{i}\mathsf{H}_0, A_0]$ régulier vis-à-vis de A_0. Alors le spectre de H_0 est purement absolument continu.

6. Donc,

$$\mathcal{H}_{\rm sing}(\mathsf{H}) \subset \mathsf{Ker}(\mathsf{K}) \overset{(!)}{=} \mathsf{Ker}(\mathsf{H}).$$

6 Quelques références

• M. Măntoiu, S. Richard et R. Tiedra. Spectral analysis for adjacency operators on graphs. *Ann. Henri Poincaré.*, 2007.

• B. Mohar et W. Woess. A survey on spectra of infinite graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 1989.

• B. Simon. Operators with singular continuous spectrum. VI. Graph Laplacians and Laplace-Beltrami operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996.