¿Qué es la desconocida en la ecuación de Einstein?

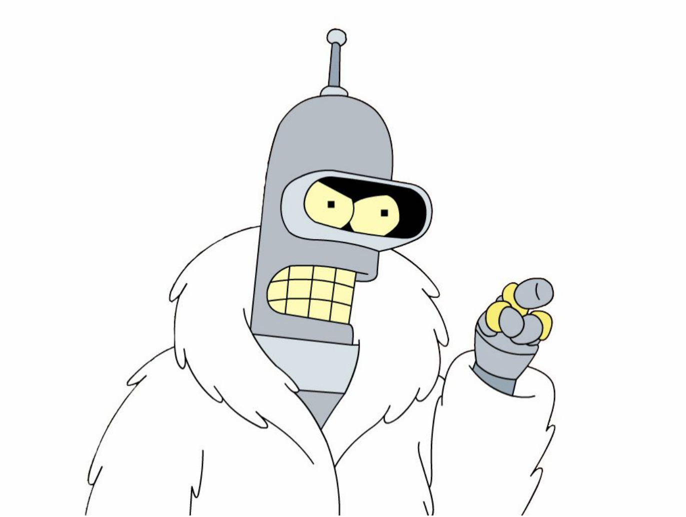
Rafael Tiedra de Aldecoa

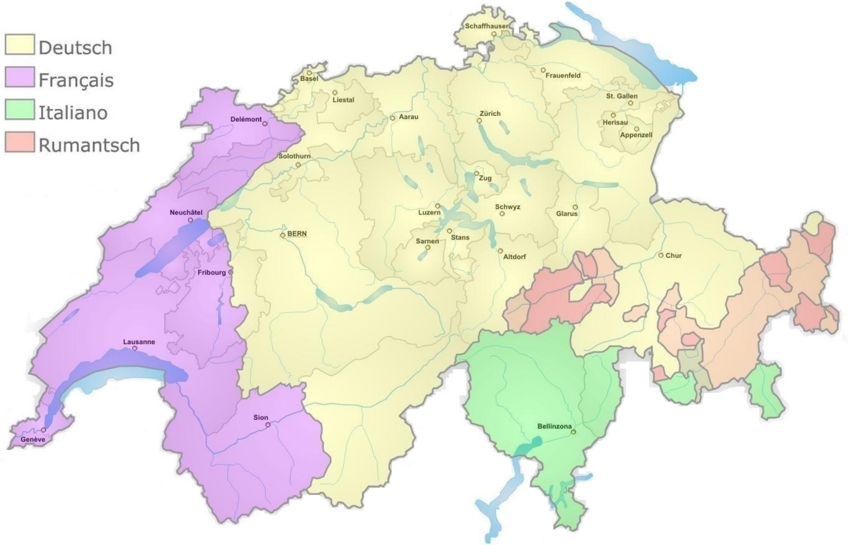
Pontificia Universidad Católica de Chile

PUC, Octubre 2019

Índice

¿Quién es este tipo?

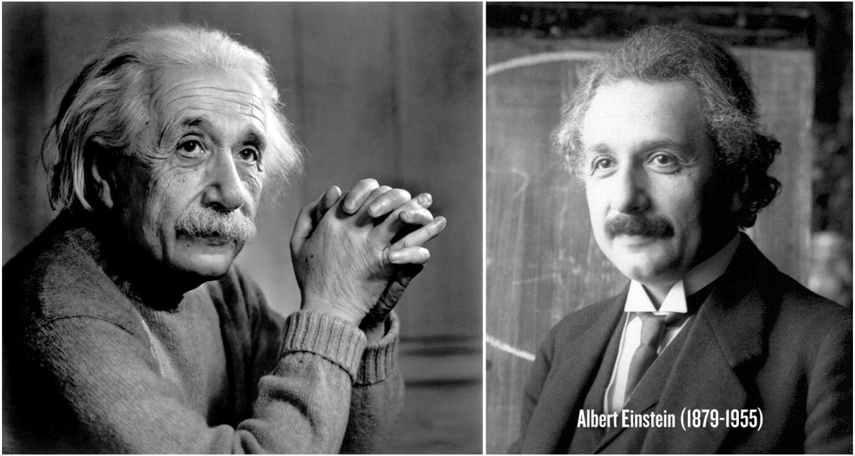



Deutsch
Français
Italiano
Rumantsch
Schaffhausen
Basel
Liestal
Frauenfeld
St. Gallen
Herisau
Appenzell
Delémont
Aarau
Zürich
Solothurn
Zug
Schwyz
Glarus
Luzern
Neuchâtel
BERN
Stans
Sarnen
Altdorf
Chur
Fribourg
Lausanne
Sion
Bellinzona
Genève

Cursus

1996 - 2001	**Magíster en física teórica,** Ginebra (relatividad general y cosmología)
2001 - 2005	**Doctorado en física matemática,** Ginebra (mecánica cuántica)
2005 - 2008	**Postdoctorados en matemática,** París
2009 - presente	**Profesor de matemática,** Santiago

Teoría de la gravedad de Einstein



Como es lejano de la intuición diaria (mundo newtoniano), la teoría de la gravedad de Einstein ocupa en nuestro imaginario un lugar particular, como por ejemplo en el cinema de Hollywood:

1968	2001: A Space Odyssey
1979	The Black Hole
1994	Stargate
1997	Contact
1997	Event Horizon
2007	Sunshine
2013	Europa Report
2014	Interstellar
2015	The Martian
2016	Passengers
2019	Ad Astra (?)

¿Pero de qué se trata?

La teoría predice las trayectorias que recorre un objeto físico (partícula de prueba) en el espacio-tiempo en presencia de materia.

Es un "refinamiento" de la teoría de la gravedad de Newton.

Isaac Newton (1643-1727)

La teoría proporciona una ecuación por la función "distancia mínima" entre dos puntos x, y del espacio-tiempo M :

$$g : M \times M \to [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto g(x, y).$$

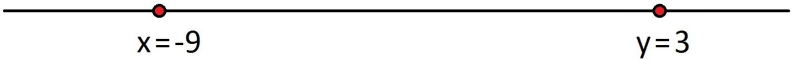
El término matemático por esta función es **métrica**.

Métrica

En la recta ($M = \mathbb{R}$), la métrica usual está dada por

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad (x, y) \mapsto \sqrt{(x-y)^2}.$$

Por ejemplo, en el caso:



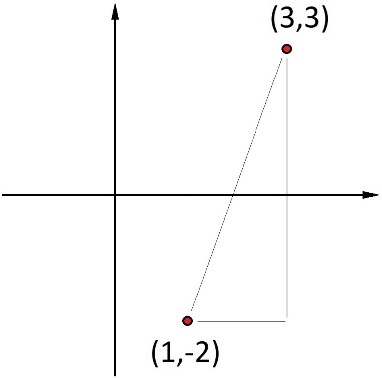
tenemos

$$g(-9, 3) = \sqrt{(-9-3)^2} = \sqrt{(-12)^2} = 12.$$

En el plano ($M = \mathbb{R}^2$), la métrica usual está dada por

$$g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty), \quad \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Por ejemplo, en el caso:

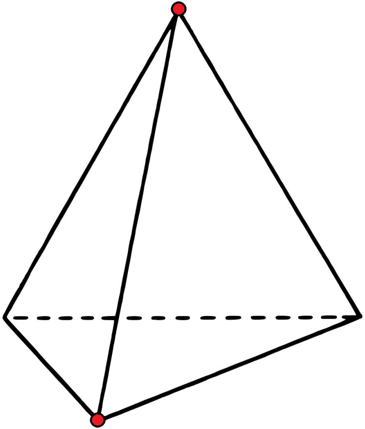


tenemos

$$g\big((3,3),(1,-2)\big) = \sqrt{(3-1)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}.$$

En el espacio ($M = \mathbb{R}^3$), la métrica usual está dada por

$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty),$$
$$\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$



Ecuación de Einstein

En la teoría de Einstein, $M = \mathbb{R}^4$ es el conjunto de los puntos del espacio-tiempo (3 dimensiones de espacio, 1 dimensión de tiempo).

Consideraciones físicas muestran que la métrica

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to [0, \infty), \\ &\quad \big((x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, \tau)\big) \mapsto g\big((x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, \tau)\big) \end{aligned}$$

no es una función fija, pero mas bien una cantidad dinámica que varía en función del lugar del espacio-tiempo y que depende de la materia presente en el espacio.

La ecuación que permite determinar la métrica es una ecuación muy compleja (un sistema de 10 ecuaciones no lineales a derivadas parciales) descubierta por Einstein en 1915 tras muchos años de trabajo.

Formalmente, es de la forma siguiente:

función complicada de la métrica g

= función que describe el contenido en materia del espacio-tiempo.

La forma exacta de la ecuación de Einstein es:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}}$$

La ecuación que permite determinar la métrica es una ecuación muy compleja (un sistema de 10 ecuaciones no lineales a derivadas parciales) descubierta por Einstein en 1915 tras muchos años de trabajo.

Formalmente, es de la forma siguiente:

función complicada de la métrica g

$=$ función que describe el contenido en materia del espacio-tiempo.

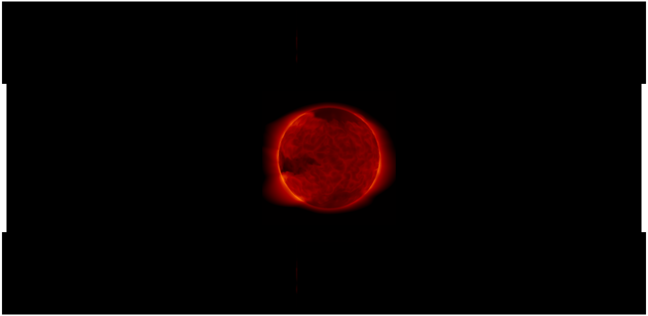
La forma exacta de la ecuación de Einstein es:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}}$$

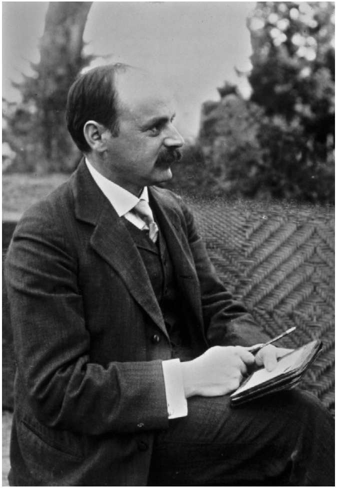
Métrica de Schwarzschild (agujeros negros)

La ecuación de Einstein es demasiado complicada para ser resuelta en el caso general.

Pero es soluble en el caso siguiente: si la masa (lado derecho de la ecuación) tiene simetría esférica y si la zona del espacio considerada es el exterior de la masa.

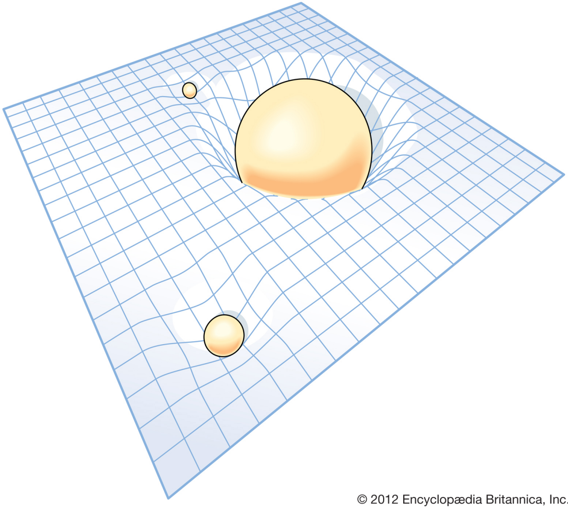


En tal caso, la solución de la ecuación de Einstein se llama **métrica de Schwarzschild**, por el nombre de su descubridor en 1915.



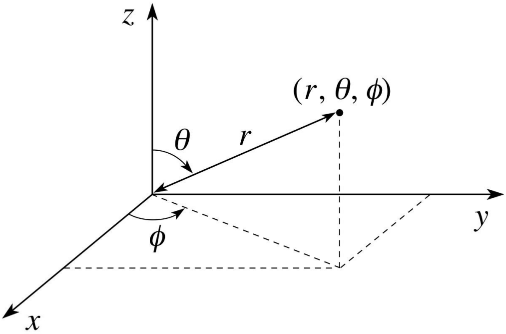
Karl Schwarzschild (1873-1916)

La métrica de Schwarzschild permite describir el movimiento de un objeto físico en el espacio-tiempo en la vecindad de un cuerpo masivo esférico (planeta, estrella, agujero negro, ...)



La métrica de Schwarzschild puede escribirse en cordenadas esféricas como una matriz:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{r_s}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$



Hay dos regiones singulares (divisiones por cero) del espacio-tiempo:

- El centro del cuerpo en $r = 0$. La teoría de Einstein no da información en esta región del espacio-tiempo.
- El **horizonte de los eventos** en $r = r_S$. Es una superficie esférica dentro o afuera del cuerpo ubicada en el **radio de Schwarzschild r_S**, donde la velocidad de escape supera la velocidad de la luz. Por ello, ningun objeto dentro del horizonte de los eventos, incluyendo fotones, puede escapar debido al campo gravitatorio.

Si el cuerpo es suficientemente masivo, el radio r_S es mas grande que el radio del cuerpo. En tal caso, el cuerpo es un **agujero negro**.

Para dar una idea, el radio del sol es $700'000\,\text{km}$, pero su radio de Schwarzschild es $3\,\text{km}$.

PLAY