Métodos a conmutadores en teoría espectral y teoría del scattering

Rafael Tiedra de Aldecoa†[1]

† Facultad de Matemáticas, P. Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile, rtiedra@mat.puc.cl

1. Teoría cuántica del scattering

Consideramos una partícula elementaria de spin $s \in \mathbb{N}$ moviendose en un espacio de configuraciones $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, en presencia de un potencial externo V. En cada tiempo $t \in \mathbb{R}$, el conjunto de los estados posibles de la partícula consituye un mismo espacio (Hilbertiano) de funciones $\mathcal{H} := \mathsf{L}^2(\Omega; \mathbb{C}^{2s+1})$. La dinámica de la particula está constreñida por el principio de conservación de la energía, el mismo formalizado por una ecuación diferencial llamada ecuación de Schrödinger [8]:

$$i\,\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = H\varphi_t \qquad (\hbar = 1),$$

donde $\varphi_t \in \mathcal{H}$ es el estado de la partícula al tiempo t y H el operador auto-adjunto $-\Delta + V$ actuando en $\mathcal{H}$. Por "analogía" al caso clásico, el operador diferencial de Laplace-Beltrami Δ (con condiciones al borde si necesario) está usualmente asociado a (menos) la energía cinética de la partícula, mientras que el operador (matricial) de multiplicación V representa su energía potencial. Luego, el operador H está naturalmente interpretado como el Hamiltoniano del sistema $\{\text{partícula + potencial externo}\}$ y el grupo unitario $\{\mathrm{e}^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ como su grupo de evolución temporal. (Recordamos que un operador U en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es unitario si verifica $U^*U = U^*U = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$, con U^* el adjunto de U.)

La teoría espectral tiene como objeto de estudio el subconjunto $\sigma(H)$ de $\mathbb{R}$, llamado espectro de H, siendo el soporte en $\mathbb{R}$ del cálculo funcional asociado al operador H.[2] El análisis de $\sigma(H)$ permite, entre otros, determinar totalmente (o parcialmente) la descomposición del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en sus componentes $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}(H)$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}(H) := \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{sc}}(H)$, cada uno teneniendo su interpretación física. $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}(H)$ es el subespacio (asociado a la parte puntual del espectro de H) generado por el conjunto de los vectores propios de H, mientras que $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}(H)$ es el subespacio (asociado a la parte continua del espectro de H) de continuidad respecto a H. Los vectores propios de H están considerados como los estados acotados del sistema, ya que queden invariantes (aparte de una fase) bajo el grupo de evolución temporal $\{\mathrm{e}^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Los vectores de $\mathcal{H}_{\mathrm{c}}(H)$ están por su parte interpretados como los estados de difusión del sistema porque se escapan, en medida temporal, de cada parte finita del espacio de configuraciones cuando $t \to +\infty$.

[1] Financiado por el Fondo Fondecyt 1090008 y por la Iniciativa Cientifica Milenio ICM P07-027-F "Mathematical Theory of Quantum and Classical Magnetic Systems".

[2] En su formulación la más sencilla, el cálculo funcional asociado a un operador H auto-adjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ consiste en el hecho que existe una medida real $E^H(\,\cdot\,)$ sobre $\sigma(H)$ (la medida espectral de H) a valores en los operadores acotados tal que

$$f(H) = \int_{\sigma(H)} \mathrm{d}E^H(\lambda)\, f(\lambda)$$

para cualquiera función $f : \sigma(H) \to \mathbb{C}$ continua acotada. Para cada $\varphi \in \mathcal{H}$, la aplicación $B \mapsto \|E^H(B)\varphi\|^2$, con $B \subset \mathbb{R}$ un boreliano y $\|\cdot\|$ la norma de $\mathcal{H}$, define una medida real μ^φ. Esta medida admite una descomposición única

$$\mu^\varphi = \mu^\varphi_{\mathrm{p}} + \mu^\varphi_{\mathrm{ac}} + \mu^\varphi_{\mathrm{sc}},$$

donde μ^φ_{p}, $\mu^\varphi_{\mathrm{ac}}$ y $\mu^\varphi_{\mathrm{sc}}$ son respectivamente medidadas puntual, absolutamente continua y singularmente continua respecto a la medida de Lebesgue. Por consiguiente, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se descompone en la suma directa

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{p}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H) \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{sc}}(H),$$

donde $\mathcal{H}_{\mathrm{p}}(H) := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mu^\varphi = \mu^\varphi_{\mathrm{p}}\}$, $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H) := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mu^\varphi = \mu^\varphi_{\mathrm{ac}}\}$ y $\mathcal{H}_{\mathrm{sc}}(H) := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mu^\varphi = \mu^\varphi_{\mathrm{sc}}\}$. Ver la Sección 7.4 de [9] para más detalles.

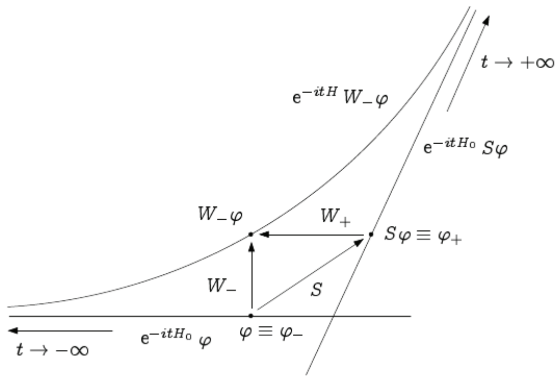

Figura 1: Operadores de ondas $W_\pm$ y operador S de scattering

En la práctica, la teoría espectral toma frecuentemente beneficio del esquema perturbativo siguiente: si el potencial V está acotado relativamente al Laplaciano Δ con cota $b < 1$, el sistema caracterizado por el Hamiltoniano H puede ser considerado como una perturbación[3] del sistema sin interacción externa descrito por el operador $-\Delta$.

Esta estructura adicional, facultativa en teoría espectral, es de cierta manera el dato inicial de la teoría del scattering. En efecto, esta teoría tiene como objectivo principal la descripción asíntotica del grupo de evolución (total) $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$ en términos de un grupo de evolución (libre) $\{e^{-itH_0}\}_{t\in\mathbb{R}}$. Luego, una de las metas de la teoría del scattering es de determinar un operador H_0 (más simple que H) tal que para cada estado de difusión $\psi \in \mathcal{H}_{ac}(H)$ al tiempo $t = 0$ se verifique lo siguiente: existen estados de difusión $\varphi_\pm \in \mathcal{H}_{ac}(H_0)$ tales que la diferencia

$$e^{-itH}\,\psi - e^{-itH_0}\,\varphi_\pm$$

converge a 0 en norma cuando $t \to \pm\infty$. Esencialmente, este problema es equivalente a la cuestión de existencia y de completitud[4] de los operadores de ondas (generalizados)

$$W_\pm := \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}\, e^{-itH_0}\, P_{ac}(H_0),$$

donde $P_{ac}(H_0)$ es el proyector ortogonal sobre $\mathcal{H}_{ac}(H_0)$ y "s- lím" hace referencia al límite fuerte en $\mathcal{H}$. La interpretación usual de los operadores $W_\pm$ está esquematizada en la Figura 1.

El método del operador conjugado, técnica aparecida en los años 1960 [6] y continuamente desarollada desde entonces, permite obtener muchos resultados encontrados en teoría espectral y teoría del scattering. Se funda sobre la introducción de un operador auto-adjunto auxiliar A teniendo ciertas propiedades de compatibilidad (expresadas en términos de la resolvente $(H-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\sigma(H)$, de H y del grupo unitario $\{e^{-itH}\}_{t\in\mathbb{R}}$) respecto al Hamiltoniano H. Si estas condiciones de regularidad están satisfechas, y si el conmutador $[iH, A]$ es estrictamente positivo cuando localizado sobre un intervalo J del espectro de H, entonces varias informaciones relativas a H pueden ser deducidas localmente en J.

Como el método del operador conjugado se basa solamente sobre el dato de un triplete abstracto $\{H, A, \mathcal{H}\}$ adecuado, su dominio de aplicación es muy amplio. Los ejemplos que siguen forman una lista revelatriz de

[3] Aquí, la expresión "el operador $T + S$ es una perturbación del operador T" hace referencia a la invariancia de las propiedades de auto-adjunción en el sentido del Teorema de Rellich-Kato. Es decir, si T es un operador auto-adjunto (esencialmente auto-adjunto) en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y S es simétrico y acotado relativamente a T con cota $b < 1$, entonces el operador $T + S$ es auto-adjunto (esencialmente auto-adjunto), $\overline{T+S} = \overline{T} + \overline{S}$ y el dominio de $\overline{T+S}$ es igual al dominio de $\overline{T}$. Ver la Sección 2.7 de [1] para más detalles.

[4] Uno dice que los operadores de ondas $W_\pm$ son completos si sus imágenes $\mathsf{Ran}(W_\pm)$ en $\mathcal{H}$ verifican la identidad

$$\mathsf{Ran}(W_-) = \mathsf{Ran}(W_+) = \mathcal{H}_{ac}(H).$$

situaciones físicas donde el método del operador conjugado ya ha permitido obtener resultados sutiles: operadores de Schrödinger (simples o a N cuerpos), medios estratificados, operadores de Dirac, teoría cuántica de campos, teoría de los grafos, mecánica estadística, efecto Hall cuántico, scattering en relatividad general, *etc.*

2. Operadores conjugados

2.1. Hipótesis generales

Consideramos un operador auto-adjunto H actuando en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con producto escalar $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ y norma $\|\,\cdot\,\|$. Notamos $\mathcal{D}(H)$ el dominio de H equipado del producto escalar grafo $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{D}(H)} := \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle + \langle H\,\cdot\,,H\,\cdot\,\rangle$. Con esta estructura, $\mathcal{D}(H)$ constituye también un espacio de Hilbert encajado continuamente y densamente en $\mathcal{H}$. Identifcando $\mathcal{H}$ con su adjunto[5] vía el isomorfismo de Riesz, obtenemos una sucesión de encajes continuos y densos:

$$\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(H)^*.$$

La primera propiedad de regularidad de H requerida en el método del operador conjugado permite de extender esta sucesión como sigue. Sea A un segundo operador auto-adjunto en $\mathcal{H}$ con dominio $\mathcal{D}(A)$ también equipado del producto escalar grafo. Entonces, uno dice que H es de clase $C^1(A)$ si la aplicación (de conjugación)

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{itA}(H-i)^{-1}\,\mathrm{e}^{-itA} \tag{1}$$

a valores en el conjunto $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ de los operadores acotados sobre $\mathcal{H}$, es fuertemente de clase C^1. De manera equivalente, H es de clase $C^1(A)$ si existe una constante $\mathrm{c} \geq 0$ tal que

$$\big|\big\langle (H+i)^{-1}\varphi, A\varphi\big\rangle - \big\langle A\varphi, (H-i)^{-1}\varphi\big\rangle\big| \leq \mathrm{c}\,\|\varphi\|^2 \tag{2}$$

para todos $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ (la intuición debajo de esta equivalencia es que la derivada en $t = 0$ de (1) da el conmutador $[(H-i)^{-1}, A]$ "$=$" $(H-i)^{-1}A - A(H-i)^{-1}$). En este caso, si el conjunto $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ está equipado con la topología de la intersección, todos los encajes de la sucesión

$$\{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)\} \subset \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(H)^* \subset \{\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)\}^*$$

son continuos y densos. Además, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$, el conmutador $[(H-z)^{-1}, A]$, definido sobre $\mathcal{D}(A)$ como en (2), se extiende por continuidad a un operador acotado sobre $\mathcal{H}$. De manera similar, el conmutador $[H, A]$, definido sobre $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$ como en (2), se extiende por continuidad a un operador acotado de $\mathcal{D}(H)$ a $\mathcal{D}(H)^*$. Las extensiones de $[(H-z)^{-1}, A]$ y $[H, A]$ (ambas escritas con los mismos símbolos) verifican entonces (en el sentido de los productos escalares, como en (2)), la relación fundamental:

$$[(H-z)^{-1}, A] = -(H-z)^{-1}[H, A](H-z)^{-1}.$$

Aparte del hecho de que H sea de clase $C^1(A)$, el método del operador conjugado requiere de manera crucial la hipótesis siguiente de positividad local del conmutador $[iH, A]$: Sea $E^H(\,\cdot\,)$ la medida espectral de H. Si H es de clase $C^1(A)$, entonces el operador $E^H(J)[iH, A]E^H(J)$ está bien definido para cualquier conjunto $J \subset \mathbb{R}$ acotado (porque $[iH, A]$ envía $\mathcal{D}(H)$ en $\mathcal{D}(H)^*$ y $E^H(J)$ envía $\mathcal{H}$ en $\mathcal{D}(H)$). También, existen números $a \in \mathbb{R}$ tales que[6]

$$E^H(J)[iH, A]E^H(J) \geq aE^H(J). \tag{3}$$

[5] El adjunto de un espacio de Banach F, notado F^*, es el espacio vectorial constituido de las funciones continuas y anti-lineales $\varphi : F \to \mathbb{C}$ equipado de la norma dual

$$\|\varphi\|_{F^*} := \sup\{|\varphi(f)| \mid f \in F,\ \|f\|_F \leq 1\}.$$

[6] Dados dos operadores acotados C_1 y C_2 en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, uno escribe $C_1 \geq C_2$ si

$$\langle\varphi, C_1\varphi\rangle \geq \langle\varphi, C_2\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{H}.$$

Si esta desigualdad está verificada para un número $a > 0$, uno dice que A es localmente estrictamente conjugado a H sobre J (por eso el calificativo de operador conjugado para designar A).

Dedicamos en el resto de esta sección a una presentación de varios resultados que pueden ser deducidos, tanto en teoría espectral como en teoría del scattering, de las hipótesis hechas en el párrafo anterior.

2.2. Operadores conjugados y teoría espectral

Si $\lambda \in \sigma(H)$ y $\mu > 0$, el operador acotado $(H - \lambda - i\mu)^{-1}$ no admite un límite en $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ cuando $\mu \searrow 0$ (porque $H - \lambda$ no es invertible !). Sin embargo, el límite

$$\lim_{\mu \searrow 0} \langle \varphi, (H - \lambda - i\mu)^{-1} \varphi \rangle \tag{4}$$

puede existir para ciertos vectores $\varphi \in \mathcal{H}$. Si para todo λ en un subconjunto $J \subset \mathbb{R}$ y para todo φ en un subconjunto denso de $\mathcal{H}$ este límite existe y si la convergencia es uniforme en λ sobre cada subconjunto compacto de J, uno dice que un principio de absorción límite para H está verificado en J. La existencia de un tal principio tiene como consecuencia principal el hecho que el espectro de H en J sea pura y absolutamente continuo (*cf.* [2, Sec. 7.1.1 & 7.1.2]).

En los años 80, el matemático francés Eric Mourre [5] observó que si la desigualdad (3) está verificada para un $a > 0$ y si H es de clase $C^2(A)$ (es decir, dos veces de clase $C^1(A)$), entonces un principio de absorción límite existe. Por eso, hablamos de desigualdad estricta de Mourre cuando la desigualdad (3) está satisfecha para un $a > 0$. Las demostraciones usuales de la existencia del límite (4) a partir de una desigualdad estricta de Mourre se fundan sobre un método iterativo, hecho de desigualdes diferenciales, relativamente técnico. Referimos el lector a [2, Sec. 7.3 & 7.4] para una presentación general del tópico y a [2, p. 267-268] para una exposición del caso particular (fundador) en que $[iH, A] = H$.

Dado un operador H, el problema principal reside entonces en la construcción de un operador adecuado A conjugado a H. Si el operador H difiere mucho del Laplaciano negativo $-\Delta$ en $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$, uno utiliza usualmente el generador del grupo de las dilataciones $A = D$ (*cf.* Sección 3) que verifica la regla de conmutación

$$\big[i(-\Delta), D\big] = -2\Delta.$$

Si el operador H difiere sensiblemente de $-\Delta$ en $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$, la elección de un operador conjugado constituye un problema abierto sujeto, hasta hoy día, a ninguna teoría general.

2.3. Operadores conjugados y teoría del scattering

Varias propiedades de propagación del estado $\mathrm{e}^{-itH} \varphi$ pueden ser obtenidas gracias al método del operador conjugado. Explicamos en lo siguiente como una desigualdad de Mourre (local) induce la existencia de operadores (localmente) H-suaves, la cual permite a su turno inferir la existencia (local) de los operadores de ondas.

Empezamos para recordar la relación entre operadores H-suaves y operadores de ondas. Un operador T cerrado con dominio $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(H)$ es localmente H-suave sobre $J \subset \mathbb{R}$ si para cada intervalo $[b, c] \subset J$ existe una constante $\mathrm{c} \geq 0$ tal que la desigualdad

$$\big\| T \,\mathsf{Im}(H - \lambda - i\mu)^{-1} T^* \big\| \leq \mathrm{c} \tag{5}$$

sea verificada para todos $\lambda \in [b, c]$ y $\mu \in (0, 1)$ (aquí la parte imaginaria "Im" está definida como para los números complejos). Utilizando la relación

$$\mathsf{Im}(H - \lambda - i\mu)^{-1} = \tfrac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \, \mathrm{e}^{it\lambda} \, \mathrm{e}^{-itH - \mu|t|},$$

podemos mostrar (ver Sección XIII.7 de [7]) que T es localmente H-suave sobre J si y sólo si existe para cada intervalo $[b, c] \subset J$ una constante $\mathrm{c} \geq 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \, \big\| T \, \mathrm{e}^{-itH} E^H([b, c]) \varphi \big\| \leq \mathrm{c} \, \|\varphi\|^2$$

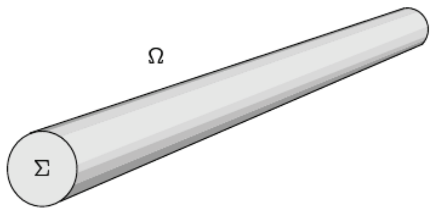

Figura 2: Guía de ondas cuántico $\Omega = \Sigma \times \mathbb{R}$

para todo $\varphi \in \mathcal{H}$. Así, la existencia de un operador T localmente H-suave sobre J provee informaciones relativas a la propagación del estado $\mathrm{e}^{-itH}\, E^H([b,c])\varphi$ (es decir, sobre el estado φ con evolución temporal dada por H y con energía en el intervalo $[b,c]$). De hecho, suponiendo que la diferencia entre los Hamiltonianos libre y total de un proceso de scattering se expresa en términos de operadores localmente suaves, uno puede mostrar teoremas de existencia de los operadores de ondas como el siguiente:

Teorema 2.1. *Sean H_1 y H_2 dos operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $E_j(\,\cdot\,)$ la medida espectral de H_j y $J \subset \mathbb{R}$. Supongamos que para cada $\varphi_j \in \mathcal{D}(H_j)$ se tiene la igualdad $\langle H_1\varphi_1, \varphi_2\rangle - \langle \varphi_1, H_2\varphi_2\rangle = \langle T_1\varphi_1, T_2\varphi_2\rangle$, con T_j un operador localmente H_j-suave sobre J. Entonces, los operadores de ondas*

$$W_\pm(H_1,H_2;J) := s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{itH_1}\,\mathrm{e}^{-itH_2}\,E_2(J)$$

existen y son isometrías parciales de $E_2(J)\mathcal{H}$ sobre $E_1(J)\mathcal{H}$. Además, los operadores $W_\pm(H_1,H_2;J)$ satisfacen la identidad

$$W_\pm(H_1,H_2;J)^* = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{itH_2}\,\mathrm{e}^{itH_1}\,E_1(J) \equiv W_\pm(H_2,H_1;J)$$

(módulo el intercambio $E_2(J) \leftrightarrow E_1(J)$, el adjunto * pasa a través del límite fuerte).

Supongamos ahora que un principio de absorción límite para H sea obtenido sobre un conjunto abierto $J \subset \mathbb{R}$ a partir de una desigualdad de Mourre. Así pues, el conjunto de vectores tales que el límite (4) existe contiene el dominio $\mathcal{D}(A)$ (*cf.* [2, Sec. 7.4]). Además, si $[b,c] \subset J$, existe una constante $\textsc{c} \geq 0$ (dependiendo de b y c) tal que

$$\big\langle \varphi, (H-\lambda-i\mu)^{-1}\varphi \big\rangle \leq \textsc{c}\left(\|\varphi\|^2 + \|A\varphi\|\right)$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $\lambda \in [b,c]$ y $\mu > 0$. De esta estimación sigue la existencia de una constante $\textsc{d} \leq 0$ tal que

$$\big\|(1+|A|)^{-1}(H-\lambda-i\mu)^{-1}(1+|A|)^{-1}\big\| \leq \textsc{d}$$

uniformemente en $\lambda \in [b,c]$ y $\mu > 0$. Comparando esta relación con la definición (5) de operadores H-suaves, deducimos que el operador $(1+|A|)^{-1}$ es localmente H-suave sobre J. De eso sigue que todo operador T en $\mathcal{H}$ satisfaciendo $(1+|A|)T^* \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$ también es localmente H-suave sobre J. En particular, si la diferencia entre los Hamiltonianos libre y total es igual a un producto de operadores $T_1^*T_2$ con $(1+|A|)T_j^* \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, entonces el método del operador conjugado permite mostrar, vía el Teorema 2.1, la existencia de los operadores de ondas.

3. Ejemplo: guía de ondas cuántico

En esta sección, ilustramos parte de la teoría de las secciones anteriores con el caso de un guía de ondas cuántico. El operador auto-adjunto H_0 que representa la dinámica cuántica libre es el Laplaciano con condiciones en la frontera de Dirichlet $-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega}$ actuando en un espacio de configuraciones igual a (o difeomorfo a) un guía de ondas infinito $\Omega := \Sigma \times \mathbb{R}$.

Como el dominio $\Omega = \Sigma \times \mathbb{R}$ es un producto directo, el espacio de Hilbert $\mathcal{H} := \mathsf{L}^2(\Omega)$ es isométrico al producto tensorial hilbertiano $\mathsf{L}^2(\Sigma) \otimes \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$, y el Hamiltoniano H_0 admite la descomposición

$$H_0 = -\Delta_{\mathrm{D}}^{\Sigma} \otimes 1 + 1 \otimes P^2,$$

donde $-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Sigma}$ es el Laplaciano de Dirichlet en $\mathsf{L}^2(\Sigma)$, $P \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}$ es el operador de impulso en $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$, $\otimes$ el producto tensorial cerrado de operadores y 1 los operadores identidades. Consideramos el operador $A := 1 \otimes D$, donde D es el generador del grupo unitario de dilataciones en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\big(\mathrm{e}^{i\tau D}\,\psi\big)(x) := \mathrm{e}^{\tau/2}\,\psi(\mathrm{e}^{\tau}\,x), \qquad \tau \in \mathbb{R},\ \psi \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}),$$

con $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones suaves y con soporte compacto en $\mathbb{R}$. Como D verifica la relación de conmutación $[iP^2, D] = P^2$ sobre $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$, el operador satisface la regla de conmutación

$$[iH_0, A] = 2 \otimes P^2.$$

Por otro lado, $-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Sigma}$ posee un espectro puramente discreto $\mathcal{T} := \{\nu_\alpha\}_{\alpha \geq 1}$ consistiendo en valores propios $0 < \nu_1 < \nu_2 \leq \nu_3 \leq \ldots$ repetidas de acuerdo a la multiplicidad[7]. En particular, la medida espectral $E^{H_0}(\,\cdot\,)$ de H_0 admite la descomposición tensorial [9, Ex. 8.21]

$$E^{H_0}(\,\cdot\,) = \sum_{\alpha \geq 1} \mathcal{P}_\alpha \otimes E^{P^2+\nu_\alpha}(\,\cdot\,), \tag{6}$$

donde $\mathcal{P}_\alpha$ es la proyección ortogonal 1-dimensional asociada a ν_α y $E^{P^2+\nu_\alpha}(\,\cdot\,)$ la medida espectral de $P^2+\nu_\alpha$. Luego, tenemos para cada $J \subset \mathbb{R}$ acotado la igualdad

$$E^{H_0}(J)[iH_0, A]E^{H_0}(J) = 2 \sum_{\alpha \in \mathbb{N}(J)} \mathcal{P}_\alpha \otimes P^2 E^{P^2+\nu_\alpha}(J), \tag{7}$$

con $\mathbb{N}(J) := \{\alpha \geq 1 \mid \sup(J) \geq \nu_\alpha\}$. Si $\sup(J) < \nu_1$, entonces $E^{H_0}(J) = 0$ y la desigualdad

$$E^{H_0}(J)[iH_0, A_0]E^{H_0}(J) \geq aE^{H_0}(J)$$

está trivialmente satisfecha para cualquier $a > 0$. En consecuencia, suponemos que $\sup(J) \geq \nu_1$ y notamos $\mathscr{F}$ la transformada de Fourier en $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$. Como el operador $1 \otimes \mathscr{F}$ es unitario, existe un número $a_J > 0$ tal que $E^{H_0}(J)[iH_0, A_0]E^{H_0}(J) \geq a_J E^{H_0}(J)$ si y sólo si

$$(1 \otimes \mathscr{F})E^{H_0}(J)[iH_0, A_0]E^{H_0}(J)(1 \otimes \mathscr{F}^{-1}) \geq a_J(1 \otimes \mathscr{F})E^{H_0}(J)(1 \otimes \mathscr{F}^{-1}). \tag{8}$$

Gracias a las fórmulas (6)-(7), es directo mostrar que la desigualdad (8) está verificada con

$$a_J = \operatorname*{ínf}_{\alpha \in \mathbb{N}(J)} \operatorname{ínf}(J - \nu_\alpha). \tag{9}$$

En particular, si existe un compacto $K \subset (\nu_1, \infty) \setminus \mathcal{T}$ tal que $J \subset K$, entonces $a_J > 0$. En consecuencia, el operador A está localmente estrictamente conjugado a H_0 sobre $\mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$. En otros términos, para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{T}$ existen números $\varepsilon > 0$ y $a > 0$ tales que

$$E^{H_0}\big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big)[iH_0, A_0]E^{H_0}\big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big) \geq aE^{H_0}\big((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\big).$$

Observe que la cota inferior (9) puede ser obtenida directamente gracias a la teoría (más abstracta) del operador conjugado para sistemas con varios canales [3, Eq. (3.8)]. En efecto, si los operadores $\mathcal{P}_\alpha \otimes (P^2 +$

[7] Referimos el lector a [4, Ch. 6] para más informaciones sobre el Laplaciano de Dirichlet sobre un dominio acotado.

ν_α) están interpretados como Hamiltonianos a un canal (el canal correspondiente a la energá transversa ν_α), entonces H_0 puede ser considerado como un Hamiltoniano a varios canales ya que

$$H_0\varphi = \sum_{\alpha\geq 1} \mathcal{P}_\alpha \otimes (P^2 + \nu_\alpha)\varphi$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(H_0)$. Luego, no es soprendente que sea difícil obtener propiedades de propagación o una estimación de Mourre para los estados localizados en energía alrededor de los valores $\lambda \in \mathcal{T}$. Por esta razón, los puntos de $\mathcal{T}$ están usualmente llamados "umbrales" ("thresholds" en inglés) del sistema cuántico a varios canales dado por H_0. De hecho, la obtención de resultados en los thresholds en teoría espectral o del scattering sigue siendo un campo de investigación intenso dentro la comunidad de físicos matemáticos.

Referencias

[1] W. O. Amrein. *Hilbert space methods in quantum mechanics*. Fundamental Sciences. EPFL Press, Lausanne, 2009.

[2] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel, and V. Georgescu. *C_0-groups, commutator methods and spectral theory of N-body Hamiltonians*, volume 135 of *Progress in Math.* Birkhäuser, Basel, 1996.

[3] A. Boutet de Monvel-Berthier and V. Georgescu. Graded C^*-algebras and many-body perturbation theory. II. The Mourre estimate. *Astérisque*, (210): 6–7, 75–96, 1992. Méthodes semi-classiques, Vol. 2 (Nantes, 1991).

[4] E. B. Davies. *Spectral theory and differential operators*, volume 42 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] E. Mourre. Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators. *Comm. Math. Phys.*, 78(3):391–408, 1980/81.

[6] C. R. Putnam. *Commutation properties of Hilbert space operators and related topics*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 36. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[7] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[8] E. Schrödinger. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Phys. Rev. 28*, pages 1049–1070, 1926.

[9] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. Translated from the German by Joseph Szücs.